1 Kompleksni oblik Maksvelovih jednačina

1.1 Maksvelove jednačine u kompleksnoj formi. Kompleksna dielektrična konstanta

A: ispišimo ponovo Maksvelove jednačine u diferencijalnoj formi za <u>linearnu</u> sredinu:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{4}$$

Kao što znamo, one važe za <u>ma kakvo</u> elektromagnetno polje. Međutim, od <u>praktičnog</u> interesa su <u>jedino</u> ona elektromagnetna polja koja potiču od <u>prostoperiodično</u> promjenljivih struja i naelektrisanja! Tako nastalo elektromagnetno polje nazivamo **<u>prostoperiodičnim ili harmonijskim</u>** elektromagnetnim poljem. (sredina je <u>linearna</u>!)
Za takvo polje moguće je <u>pojednostaviti</u> Maksvelov sistem jednačina. To uprošćenje ima sledeću matematičku podlogu.
Bilo koju harmonijsku funkciju predstavljamo oblikom

$$a(r,t) = a_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ , gdje je} \tag{5}$$

a_m - skalarna amplituda (i realna je veličina), $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$ - kružna učestanost, φ - početna faza. Znamo da će uočenoj skalarnoj harmonijskoj funkciji odgovarati kompleksni predstavnik oblika:

$$a(r,t) = a_m\, \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = a_m\, \mathrm{e}^{j\varphi}\, \mathrm{e}^{j\omega} = \underline{a}(r)\, \mathrm{e}^{j\omega t} \text{ , jer je} \tag{6}$$

$\mathrm{Re}\left[\underline{a}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right] = a_m \cos(\omega t + \varphi)$, pri čemu se veličina $\underline{a}(r)$ naziva kompleksnom amplitudom kompleksnog predstavnika.
Na sličan način se definiše kompleksni predstavnik neke vektorske harmonijske funkcije. Naime, opšti oblik takve funkcije glasi:

$$\vec{A}(r,t) = \vec{i}_x A_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{i}_y A_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{i}_z A_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z) \tag{7}$$

Kompleksni predstavnik ovakve vektorske funkcije biće, analogno skalarnoj funkciji, oblika:

$$\vec{A}(r,t) = \underline{\vec{A}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\text{ ,} \tag{8}$$

jer je

$$\mathrm{Re}\left[\underline{\vec{A}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right] = \vec{A}(r,t) \text{ , trenutna vrijednost vektorske funkcije} \tag{9}$$

gdje je $\underline{\vec{A}}(r)$ - kompleksna amplituda kompleksnog predstavnika.
Umjesno je ovdje postaviti pitanje: Imamo li pravo proširivati Maksvelove jednačine, koje važe za trenutne vrijednosti odgovarajućih elektromagnetnih veličina, njihovim kompleksnim predstavnicima? Odgovor glasi: Imamo pravo, pod uslovom da je u novoj, kompleksnoj formi sadržan izvorni oblik ovih jednačina! Pokažimo to na primjeru Treće Maksvelove jednačine. Ona glasi:

$$\operatorname{div}\vec{B}(r,t)=0 \tag{10}$$

Za slučaj harmonijskog polja u linearnoj sredini možemo je napisati u kompleksnom domenu u obliku:

$$\operatorname{div}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]=0\ \text{, ili} \tag{11}$$

$$\operatorname{div}\left\{\operatorname{Re}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]+j\operatorname{Im}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]\right\}=0\text{, ili} \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\left\{\operatorname{Re}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]\right\}=0,\qquad \operatorname{div}\left\{\operatorname{Im}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]\right\}=0 \tag{13}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}(r,t)=0\ ! \tag{14}$$

Nije bitno što smo uveli i neki dodatni uslov: $\operatorname{div}\operatorname{Im}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]=0$! Bitno je da je izvorni zakon sadržan u:

$$\operatorname{div}\operatorname{Re}\left[\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right]=0\ ! \tag{15}$$

Na ovom mjestu je veoma važno konstatovati još i ovo: **Sve operacije i sve veličine u Maksvelovim jednačinama su linearne operacije i linearne veličine**!
Zaključak: Zbog linearnosti Maksvelovih jednačina (harmonijska polja u linearnoj sredini!) mogu se trenutne vrijednosti veličina u tim jednačinama predstaviti njihovim kompleksnim predstavnicima, čime izvorna forma Maksvelovih zakona ostaje sačuvana!
Dakle, kompleksni predstavnici vektorskih i skalarnih veličina u Maksvelovim jednačinama imaju oblik:

$$\vec{H}(r,t)=\underline{\vec{H}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{16}$$

$$\vec{E}(r,t)=\underline{\vec{E}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{17}$$

$$\vec{B}(r,t)=\underline{\vec{B}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{18}$$

$$\vec{J}(r,t)=\underline{\vec{J}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{19}$$

$$\rho(r,t)=\underline{\rho}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{20}$$

Znajući još da operaciji diferenciranja u realnom domenu odgovara množenje operatorom $j\omega$ u kompleksnom domenu, i znajući da je:

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}=\mathrm{e}^{j\omega t}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(r) \tag{21}$$

(jer je rotor vektorska veličina, te se mora vezati za prostornu funkciju $\underline{\vec{H}}(r)$, dok je vremenska funkcija $\mathrm{e}^{j\omega t}$ nezavisna od pojma rotora!), Maksvelove jednačine, prevedene iz realnog u kompleksni domen, poprimaju sledeći oblik:

$$\mathrm{e}^{j\omega t}\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(r)=\underline{\vec{J}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t}+\varepsilon j\omega\underline{\vec{E}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{22}$$

$$\mathrm{e}^{j\omega t}\operatorname{rot}\underline{\vec{E}}(r)=-\mu j\omega\underline{\vec{H}}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{23}$$

$$\mathrm{e}^{j\omega t}\operatorname{div}\underline{\vec{B}}(r)=0 \tag{24}$$

$$\mathrm{e}^{j\omega t}\operatorname{div}\underline{\vec{D}}(r)=\underline{\rho}(r)\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{25}$$

ili, poslije skraćivanja vremenske funkcije koja je uvijek (!) $\mathrm{e}^{j\omega t}\neq 0$, dobijamo konačno:

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}(r) = \underline{\vec{J}}(r) + j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}(r) \tag{26}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}(r) = -j\omega\mu\underline{\vec{H}}(r) \tag{27}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{B}}(r) = 0 \tag{28}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{D}}(r) = \underline{\rho}(r) \tag{29}$$

Sada je jasnije sagledati zašto smo prevodili Maksvelove jednačine iz realnog u kompleksni domen. Umjesto da operišemo sa trenutnim vrijednostima komponenata polja koje su funkcije kako prostornih koordinata tako i vremena, u kompleksnom domenu figurišu njihove kompleksne amplitude koje su funkcije samo od prostornih koordinata! Drugim riječima, isključili smo zavisnost po vremenu, što je veoma veliko olakšanje! Drugo, operacije diferenciranja i integraljenja zamijenili smo prostim algebarskim operacijama sa kompleksnim brojevima; (množenjem i dijeljenjem sa $j\omega$)

B: Razmotrimo na kraju na šta se svode Maksvelove jednačine u kompleksnom obliku za slučaj:

1. Idealnog dielektrika: S obzirom da je u ovom slučaju $\sigma = 0$, što ima za posledicu da je i $\vec{J} = 0$, to se prva jednačina mijenja u:

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}(r) = j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}(r) \tag{30}$$

Ostale tri jednačine ostaju nepromijenjene.

2. Provodne sredine: Sada će prva jednačina glasiti:

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}(r) = \underline{\vec{J}}(r) + j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}(r) = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\underline{\vec{E}}(r) \tag{31}$$

ili, ako izraz u zagradi shvatimo kao kompleksnu dielektričnu konstantu, tj. ako označimo da je:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \tag{32}$$

tada prva jednačina dobija formu:

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}(r) = j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\vec{E}}(r) \tag{33}$$

Primijenimo operator div na ovu jednačinu. Biće:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}(r) = \mathrm{div}\, j\omega\underline{\varepsilon}\underline{\vec{E}}(r) \quad \text{, odavde je} \tag{34}$$

$$0 = \mathrm{div}\,\underline{\vec{E}}(r) \;\; ! \tag{35}$$

Dakle, iz prve jednačine (primjenom operatora div) dobijamo četvrtu jednačinu! Ranije smo pokazali da treća jednačina u opštem slučaju slijedi iz druge. Zato ispišimo sada, za slučaj prostoperiodičnog polja, sve četiri Maksvelove jednačine ponaosob za idealni dielektrik i provodnu sredinu. Imaćemo za:

Idealni dielektrik: ($\sigma = 0$, $\rho = 0$)

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \tag{36}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \tag{37}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{B}} = 0 \tag{38}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{D}} = 0 \tag{39}$$

Provodna sredina: ($\rho = 0$)

$$\text{rot}\,\vec{\underline{H}} = j\omega\underline{\varepsilon}\vec{\underline{E}} \tag{40}$$

$$\text{rot}\,\vec{\underline{E}} = -j\omega\mu\vec{\underline{H}} \tag{41}$$

$$\text{div}\,\vec{\underline{B}} = 0 \tag{42}$$

$$\text{div}\,\vec{\underline{D}} = 0 \tag{43}$$

Formalno, dakle, sistemi Maksvelovih jednačina, za slučaj prostoperiodičnog polja u idealnoj dielektričnoj odnosno provodnoj sredini, su identični, s tom razlikom što umjesto ε kod idealnog dielektrika imamo $\underline{\varepsilon}$ kod provodne sredine! Otuda će i rješenja ta dva sistema, pri istim graničnim uslovima, biti formalno ista; jedino će se razlikovati dielektrične konstante. Vratimo se, za trenutak, ponovo na kompleksnu dielektričnu konstantu. Kao i svaka druga kompleksna veličina i ona se sastoji iz realnog i imaginarnog dijela, tj:

$$\text{Re}\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) = \varepsilon \tag{44}$$

$$\text{Im}\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) = \frac{\sigma}{\omega} \tag{45}$$

Možemo napisati i ovako:

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \tag{46}$$

Pri čemu veličina $\sigma / \omega\varepsilon$ predstavlja određenu karakteristiku te sredine, tj odražava svojstvo provođenja i svojstvo polarizacije te sredine, vezujući istovremeno ta svojstva za ω (brzinu promjene polja)! Ova veličina se još naziva i tangensom ugla gubitaka, tj:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \text{tg}\,\delta \text{ , te je} \tag{47}$$

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon(1 - j\,\text{tg}\,\delta) \tag{48}$$

1.2 Električna svojstva izotropnih linearnih sredina u prostoperiodičnom polju

Jednačina

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \sigma\vec{\underline{E}} + j\omega\varepsilon\vec{\underline{E}} \tag{49}$$

čije fizičko značenje jeste u tome što nam pokazuje da u stvaranju magnetne komponente elektromagnetnog polja učestvuje kako kondukciona struja (prvi sabirak) tako i struja pomjeraja (drugi član)! Nije teško prosuditi koja je od ove dvije struje dominantnija u procesu stvaranja magnetnog polja.
Dakle, znamo da je

$$\vec{\underline{J}} = \sigma\vec{\underline{E}} \text{ - kondukciona struja} \tag{50}$$

$$\vec{\underline{J}}_p = j\omega\varepsilon\vec{\underline{E}} \text{ - struja pomjeraja} \tag{51}$$

Kod harmonijskih polja odnos intenziteta ove dvije struje daje tangens ugla gubitaka, tj

$$\frac{\left|\vec{\underline{J}}\right|}{\left|\vec{\underline{J}}_p\right|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \text{tg}\,\delta \tag{52}$$

Posmatrajmo sledeća tri slučaja:
1. slučaj: $\mathrm{tg}\,\delta \ll 1$. Iz gornjeg količnika to znači da je $|\vec{J}| \ll |\vec{J}_p|$, što znači da je efekat provođenja znatno manji od efekta polarizacije! Takav materijal, odnosno sredinu, možemo svrstati u klasu **izolatora ili dielektrika**!
2. slučaj: $\mathrm{tg}\,\delta \gg 1$. Znači, drugim riječima, da je kondukciona struja dominantna u odnosu na struju pomjeraja. (to je slučaj sa sredinom koja ima mnoštvo slobodnih elektrona ili jona.) Otuda je i efekat provođenja dominantniji od efekta polarizacije! Dakle, ovo je slučaj **provodne sredine**! I najzad,
3. slučaj: $\mathrm{tg}\,\delta \approx 1$. Znači, struja provođenja istog je reda veličine kao i struja polarizacije. A to znači, efekat polarizacije je približno isti efektu provođenja! Očigledno, u pitanju je **poluprovodna sredina**.

Konkretne vrijednosti parametara navedenih sredina bi bile:

1. dobri izolatori: $\sigma \approx 10^{-12}$ do $10^{-17} S/m$, $\varepsilon \approx 10^{-11} F/m$;

$$\mathrm{tg}\,\delta \approx \frac{10^{-12}}{2\pi f \cdot 10^{-11}} = \frac{10^{-1}}{2\pi f} \ll 1 \tag{53}$$

čak i pri niskim učestanostima! A to znači da su dobri dielektrici za sve učestanosti dobri dielektrici!

2. dobri provodnici: imaju $\sigma \approx 10^{7} S/m$, $\varepsilon \approx 10^{-11} F/m$;

$$\mathrm{tg}\,\delta \approx \frac{10^{7}}{2\pi f \cdot 10^{-11}} = \frac{10^{18}}{2\pi f} \gg 1 \tag{54}$$

čak i pri vrlo visokim učestanostima! Metali se mogu svrstati u dobre provodnike. Oni su dobri provodnici pri svim učestanostima! I najzad,

3. poluprovodnici, čije je: $\sigma \approx 10^{-2} S/m$. $\varepsilon \approx 10^{-11} F/m$;

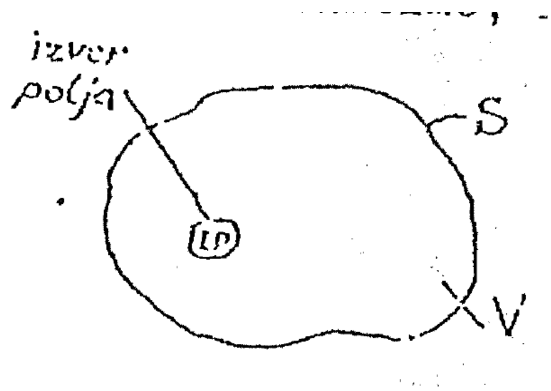
$$\mathrm{tg}\,\delta \approx \frac{10^{-2}}{2\pi f \cdot 10^{-11}} = \frac{10^{9}}{2\pi f} \begin{cases} \ll 1, & \text{pri visokim učestanostima} \\ \gg 1, & \text{pri niskim učestanostima} \end{cases} \tag{55}$$

2 Energija elektromagnetnog polja

2.1 A. Teorema Pointig-a

Elektromagnetno polje je jedan realan fizički proces koji se odvija u supstanci. Razumljivo je da je za stvaranje elektromagnetnog polja morala biti uložena energija. Kako se ta uložena energija distribuira?
Da bi odgovorili na ovo pitanje posmatraćemo najopštiji slučaj. Naime, uočićemo neki domen V kojeg ograničava zatvorena površina S i u kome se nalazi i izvor polja. Sredina unutar domena je na nekim mjestima provodna, na nekim dielektrična, ali u svakom slučaju linearna, što znači da su joj parametri

$$\varepsilon = const \text{ i } \mu = const \tag{56}$$



Polazimo, logično, od Maksvelovih jednačina. Prve dvije jednačine (u diferencijalnoj formi) glase:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{57}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{58}$$

Pomnožimo (skalarno) prvu jednačinu sa $\vec{E}$, a drugu sa $\vec{H}$, a zatim oduzimamo prvu od druge. Biće:

$$\vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\vec{J} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{59}$$

Kako unutar domena imamo i izvor polja to se u tačkama unutar izvora mora primijeniti Omov zakon u najopštijem obliku, tj:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{st}) \text{ , odakle je} \tag{60}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_{st} \tag{61}$$

Uvrštavanjem u gornju relaciju i znajući da je:

$$\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} \tag{62}$$

dobijamo

$$\mathrm{div}\,\vec{E}\times\vec{H} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma} + \vec{J}\vec{E}_{st} \tag{63}$$

Integrirajući lijev i desnu stranu po domenu V dobijamo:

$$\int_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})dV = -\int_V \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}dV - \int_V \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}dV - \int_V \frac{J^2}{\sigma}dV + \int_V \vec{J}\vec{E}_{st}dV \tag{64}$$

Odnosno, praveći drugačiji raspored sabiraka dobijamo konačno:

$$\int_V \vec{J}\vec{E}_{st}dV = \int_V \frac{J^2}{\sigma}dV + \int_V \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}dV + \int_V \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}dV + \oint_{S_V} (\vec{E}\times\vec{H})dS \tag{65}$$

Napomena: 1. Poslednji sabirak je dobijen primjenom teoreme Gaus-a Ostrogradskog.
2. Svaki od pet sabiraka po svojoj prirodi predstavlja snagu. Na primjer prvi sabirak gledan dimenziono daće:

$$\frac{J^2}{\sigma}(=)\frac{\frac{A}{m^2}\frac{A}{m^2}}{\frac{S}{m}}m^3=A\cdot A\cdot\frac{1}{S}=A\cdot A\cdot\Omega=A\cdot V=W \tag{66}$$

Slično je i sa drugim sabirkom:

$$E\frac{\partial D}{\partial t}(=)\frac{V}{m}\frac{\frac{C}{m^2}}{s}m^3=V\cdot\frac{C}{s}=V\cdot A=W \tag{67}$$

Razmotrimo svaki član ponaosob.
Član na lijevoj strani jednačine dat je u obliku

$$\int_V \vec{J}\vec{E}_{st}dV \tag{68}$$

Nedvosmisleno ukazuje da se odnosi na sami izvor polja! Naime, on predstavlja snagu razvijenu u samom izvoru! Desna strana jednačine nam pokazuje na šta se sve ta snaga izvora troši, odnosno kako se raspodjeljuje (distribuira). Pa nam kaže da:
-prvi sabirak

$$\int_V \frac{J^2}{\sigma}dV \tag{69}$$

Predstavlja snagu neizbježnih Džulovih gubitaka utrošenih u provodnim djelovima domena V . Dakle, taj dio snage izvora troši se nepovratno na toplotne gubitke.
-drugi sabirak

$$\int_V \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}dV \tag{70}$$

Predstavlja onaj dio snage izvora utrošen na stvaranje <u>električne</u> komponente elektromagnetnog polja
-treći sabirak

$$\int_V \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}dV \tag{71}$$

Odnosi se na onaj dio snage izvora koji je utrošen na formiranje <u>magnetne</u> komponente elektromagnetnog polja.
-četvrti i poslednji sabirak zaslužuje posebnu pažnju, jer u njemu figuriše i električna i magnetna komponenta elektromagnetnog polja! Ovaj član odražava jedno <u>novo</u> svojstvo promjenljivog elektromagnetnog polja koje do sada nije imalo ni vremenski nepromjenljivo električno polje ni vremenski nepromjenljivo magnetno polje!
Prije svega, gledajući formalno-matematički izraz

$$\oint_{S_V}(\vec{E}\times\vec{H})dS \tag{72}$$

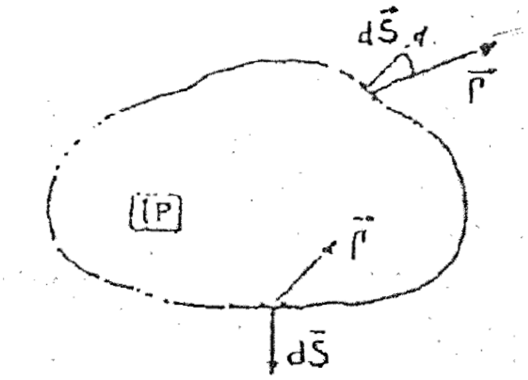
Predstavlja <u>fluks</u>! S druge strane, s obzirom na svoju prirodu, ovaj izraz morao bi da predstavlja onaj dio snage, odnosno energije izvora koji kroz površinu domena V odlazi u okolni prostor! Ovakvom konstatacijom mi smo zapravo utvrdili jedno veoma bitno <u>dinamičko</u> svojstvo elektromagnetnog polja! Naime, elektromagnetno polje stvoreno unutar domena V <u>širi</u> se u okolni prostor! Ovo svojstvo nije imao ni izvor nepromjenljivog električnog polja ni izvor nepromjenljivog magnetnog polja. Ova polja su prosto bila <u>nerazdvojno vezana</u> za svoje izvore! <u>Nestajanjem</u> njihovih <u>izvora nestajala</u> su i ova <u>polja</u>. To, međutim, nije slučaj sa dinamičkim ili elektromagnetnim poljem! Jednom pobuđeno, **elektromagnetno polje postaje nezavisno od svog izvora u prostorno i vremenski**! Ovakvim rezonovanjem došli smo do saznanja da se energija može bežičnim putem prenositi sa jednog mjesta na drugo kroz bilo kakvu sredinu!

Veličina

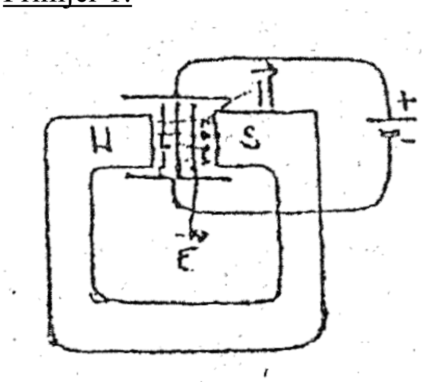
$$\vec{\Gamma} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{73}$$

naziva se Pointig-ov vektor. Njegov intenzitet predstavlja onaj dio snage izvora utrošene na stvaranje elektromagnetnog polja i, samim tim, sadržane u tom polju koje se prostire od izvora do „beskonačnosti“. Inače, po svojoj prirodi ovaj vektor predstavlja površinsku gustinu snage razmjene:

$$\Gamma(=)E \cdot H = \frac{V}{A}\frac{A}{m} = \frac{W}{m^2} \tag{74}$$

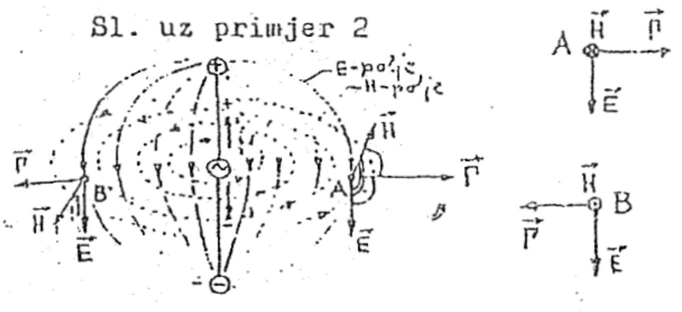


Kada je ugao $\measuredangle(\vec{\Gamma}, d\vec{S}) < 90°$ znači (matematički) da je snaga $P > 0$, a to fizički znači da domen V odašilje energiju u okolni prostor, odnosno da se u domenu V nalazi izvor elektromagnetnog polja. U slučaju da je $\measuredangle(\vec{\Gamma}, d\vec{S}) > 90°$ znači da domen V ne zrači energiju nego je prima.
U svakom slučaju ostaje nepromijenjen zaključak da stvoreno dinamičko polje (elektromagnetno polje) razmjenjuje energiju sa okolnim prostorom.
Vektori $\vec{E}$, $\vec{H}$ i $\vec{\Gamma} = \vec{E} \times \vec{H}$ predstavljaju komponente jedinstvenog elektromagnetnog polja, komponente koje su međusobno uzajamno uzročno vezane! (Dakle, ne radi se o prosto superponovanim nezavisnim veličinama!)
Da bi se bolje shvatila sama priroda Pointigovog vektora posmatraćemo sledeće primjere:
Primjer 1:



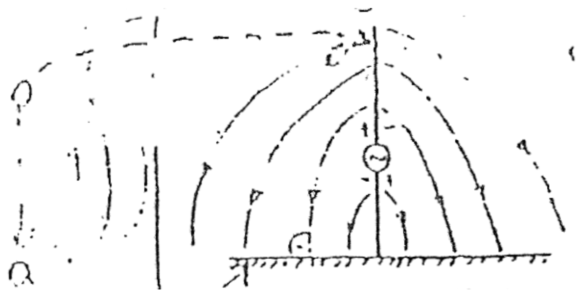
Između polova stalnog magneta potkovičastog oblika smješten je pločasti kondenzator priključen na izvor jednosmjernog napajanja. Između ploča kondenzatora postojače stalno (homogeno) električno polje. Očigledno je da u ovom slučaju nema smisla uvoditi Pointigov vektor pošto se radi o poljima koja nijesu uzajamno uzročno vezana! Naime, tu se radi o dva vremenski nezavisna polja iz dva nezavisna izvora! Rezultantno polje je nastalo prostom superpozicijom nezavisnih polja $\vec{E}$ i $\vec{H}$.

Primjer 2:



Dvije metalne kuglice vezane su međusobno preko izvora neizmjenične struje kao na slici. One, u stvari, predstavljaju jedan konedenzator. Naizmjenični izvor je visoke učestanosti, lako je pokazati da ovaj sistem zrači energiju u okolni prostor. Neka je u jednom trenutku polarizacija kuglica kao na slici. U naizmjeničnom izvoru se vrši razdvajanje naelektrisanja; u uočenom trenutku pozitivna naelektrisanja idu gore, negativna na donju kuglicu (dakle, smjer struje je od donje prema gornjoj kuglici). Smjer linija polja $\vec{E}$ je od gornje (pozitivne) prema donjoj (negativnoj) kuglici. Smjer linija polja $\vec{H}$, koje obuhvataju linije polja $\vec{E}$, su kao na slici (smjer desne zavojnice). Da bismo utvrdili smjer Pointigovog vektora (odnosno smjer emitovanja energije) uočimo tačke A i B. Lako je uočiti da je smjer Pointigovog vektora kao na slici, što zanči da ovaj sistem zrači ili odašilje energiju u okolni prostor! Ovaj sistem, u stvari, predstavlja takozvani **Hercov dipol,** kojim je 1888 god. Herc eksperimentalno prvi put potvrdio Maksvelove postulate. Dakle, punih 25 godina nakon pojave Maksvelove teorije.

Ako gornji krak sa kuglicom zamijenimo dugačkom žicom, a donji krag sa kuglicom zamijenimo sa zemljom, dobijeni sistem će mnogo jače da zrači energiju u okolni prostor i na mnogo večem odstojanju od sistema! Ovaj sistem, u stvari, predstavlja **antenu!**



2.2 B: energija električne komponente elektromagnetnog polja

Interpretirajući Pointigovu teoremu kazali smo da izraz

$$P_e = \int_V \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV \tag{75}$$

Predstavlja snagu koju je apsorbovala električna komponenta elektromagnetnog polja. Množeći lijevu i desnu stranu sa dt dobijamo energiju koju je ta komponenta apsorbovala

$$dW_e = \int_V \vec{E} d\vec{D} dV \tag{76}$$

Dakle, ovo je priraštaj energije koju apsorbuje električna komponenta pri promjeni vektora električnog pomjeraja za veličinu dD.

Ako se $\vec{E}$ (odnosno $\vec{D}$) mijenja od jedne konačne vrijednosti (od 0) do neke druge konačne vrijednosti, onda će energija električne komponente iznositi

$$W_e = \int_V dV \int_0^E \vec{E} d\vec{D} \tag{77}$$

Od interesa je poznavati (naročito zbog upoređivanja) i takozvanu zapreminsku gustinu energije, koja će u ovom slučaju za električnu komponentu elektromagnetnog polja iznositi (nakon diferenciranja lijeve i desne strane gornje relacije i dijeljenja sa diferencijalnom veličinom dV)

$$\frac{dW_e}{dV} = \omega_e = \int_0^E \vec{E} d\vec{D} \tag{78}$$

Ovaj izraz za zapreminsku gustinu energije važi u opštem slučaju tj za ma kakvu sredinu. u specijalnom slučaju kada se radi o linearnoj sredini imamo da je $\varepsilon = const$, te izraz za zapreminsku gustinu energije poprima sledeći oblik:

$$\omega_e = \varepsilon \int_0^E \vec{E} d\vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D} \tag{79}$$

Napomena. Sredine koje se sreću u prirodi, sa malim izuzetkom, su gotovo sve linearne sredine, tj sredine za koje važi da je $\varepsilon = const$.

2.3 C: energija magnetne komponente elektromagnetnog polja

Iz Pointigove teoreme izraz

$$P_m = \int_V \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV \tag{80}$$

Predstavlja snagu koju je apsorbovala magnetna komponenta elektromagnetnog polja. Množeći lijevu i desnu stranu sa infinitezimalnom veličinom dt dobijamo (infinitezimalnu) energiju koju je ta komponenta apsorbovala

$$dW_m = \int_V \vec{H} d\vec{B} dV \tag{81}$$

A ovo je priraštaj energije koju je apsorbovala magnetna komponenta elektromagnetnog polja ako se vektor magnetne indukcije promijeni za vrijednost dB.
Ako se magnetna indukcija $\vec{B}$ promijeni od jedne konačne vrijednosti (od 0) do neke druge konačne vrijednosti tada će apsorbovana energija od strane magnetne komponente iznositi

$$W_m = \int_V dV \int_0^B \vec{H} d\vec{B} \tag{82}$$

Slično, kao i u prethodnom slučaju, dobijamo da je zapreminska gustina energije magnetne komponente u opštem slučaju data sa

$$\frac{dW_m}{dV} = \omega_m = \int_0^B \vec{H} d\vec{B} \tag{83}$$

U specijalnom slučaju kada se radi o linearnoj sredini za koju kao što znamo, važi

$$\mu = const \tag{84}$$

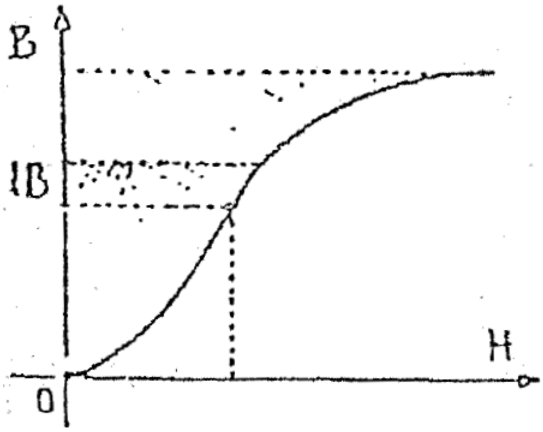
Dobijamo da je

$$\omega_m = \mu \int_0^H \vec{H} d\vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} \qquad (85)$$

I u magnetnom pogledu najveći broj sredina u prirodi je linearnog karaktera! No, vrlo veliki praktični značaj imaju nelinearne sredine, kao što su takozvani feromagnetici, iako je njihov broj mali! Za ovakve sredine važi relacija

$$\mu = \mu(H) \qquad (86)$$

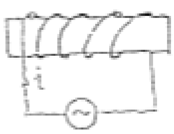
Treba napomenuti da je ova zavisnost vrlo složena, čak toliko složena da se za nju ne zna matematički izraz, već se funkcionalna zavisnost utvrđuje samo eksperimentalno! Ova zavisnost predstavljena grafički, ima dijagram kao na slici.

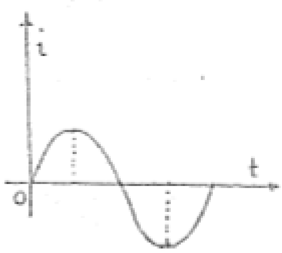


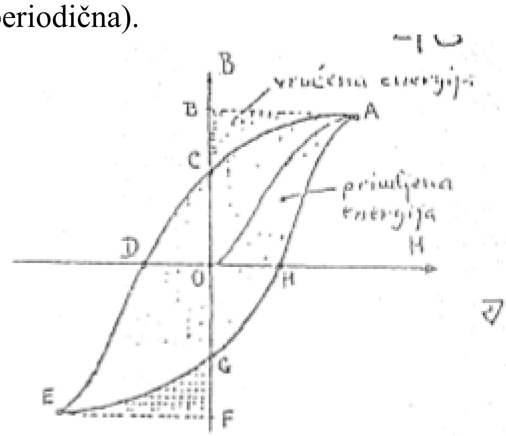
Pošto se radi o nelinearnim sredinama to se zapreminska gustina energije može izračunati samo koristeći opštu relaciju

$$\omega_m = \int_0^B \vec{H} d\vec{B} \qquad (87)$$

Pogledajmo šta predstavlja podintegralni izraz na grafiku. Nije teško zapaziti da magnetna energija koju apsorbuje jedinica zapremine feromagnetika je srazmjerna površini između krive magnećenja i B ose! Kriva magnećenja se dobija na sledeći način: komad feromagnetika magnetišemo preko solenoida prema navedenoj šemi, pri čemu izvor daje struju kao na slici (naizmjenična struja - prostoperiodična).







Oblik dijagrama poznat je još iz Osnova elektrotehnike. Umjesto da opisujemo njegovo nastajanje prodiskutujmo gotovi dijagram i to za pozitivnu polovinu ciklusa struje:

1. $H > 0$, $dB > 0$, jer H raste, te je $HdB > 0$.
Dakle, energija je pozitivna što fizički znači da materijal prima odnosno apsorbuje energiju.

2. Struja je još uvijek pozitivna, ali se smanjuje, dakle $H > 0$, ali je $dB < 0$, te je $HdB < 0$.

Gledajući dijagram, ovo fizički znači da se jedan dio energije magnetika vraća izvoru! Kažemo jedan dio, jer za $H=0$ je $B \neq 0$. Vraćena energija je srazmjerna površini trougla ABC! Energija magnetika (za $i>0$) je srazmjerna površini oivičenoj konturom OACO! Zanemarujući za trenutak početnu krivu magnećenja i posmatrajući histerezisni ciklus počev od tačke A (kojoj odgovara maksimalna vrijednost struje) možemo izvesti ovakav zaključak: U toku jedne periode (jedan puni histerezisni ciklus) jedinica zapremine feromagnetika apsorbovala je energiju koja je srazmjerna površini histerezisnog ciklusa. Umjesno je postaviti pitanje: Gdje je ta energija? Fizički gledano, ta energija je nepovratno pretvorena u toplotu usled **uzastopnih sudara takozvanog Vajsovih domena namagnećenosti**, u procesu magnećenja.
Prostoperiodična struja (odnosno polje H), koja vrši magnećenje, opiše ovakvih ciklusa „ f “ u jednoj sekundi. Kako histerezisnih ciklusa ima „ f “ u jednoj sekundi, a energija svakog od njih je srazmjerna površini jednog ciklusa, to je i ukupna energija apsorbovana u magnetiku srazmjerna proizvodu površine jednog ciklusa i frekvencije f. Otuda je i snaga gubitaka u jedinici zapremine takođe srazmjerna istom proizvodu, tj:

$$\frac{dP_{hg}}{dV} = S_{hc} f \tag{88}$$

Logično je zaključiti da što je veća zapremina feromagnetskog materijala to su i gubici veći. Ovi gubici su naročito izraženi kod energetskih uređaja, koji imaju velike mase feromagnetskog jezgra. S toga ove gubitke treba svesti na najmanju moguću mjeru. To se postiže u samom tehnološkom postupku pri proizvodnji feromagnetnih materijala dodavanjem određenih sastavnih elemenata. (Treba razlikovati histerezisne gubitke od gubitaka usled Fukoovih struja!)